Algoritmi pretraživanja

Zadatak 1: Hanojske kule

Posmatrajmo igru Hanojskih kula, sa dva diska različitih poluprečnika i tri stuba (slika 1). Cilj igre je da se oba diska sa stuba 1 prebace na stub 3, poštujući pritom sledeća ograničenja:

- u datom trenutku može se pomeriti samo jedan disk, i
- veći disk ne sme ni u jednom trenutku da se nađe iznad manjeg.

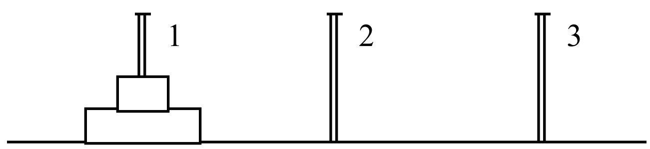
Ako sa (x, y) označimo stanje problema, pri čemu je x broj stuba na kojem se nalazi veći, a y broj stuba na kojem se nalazi manji disk, potrebno je:

a) odrediti dozvoljena stanja problema i

b) formirati tabelu dozvoljenih prelaza izmedju stanja u jednom potezu.

c) prikazati kompletan graf pretrage za navedeni problem

d) prikazati kompletno stablo pretrage.



Slika 1

Rešenje

a) Dozvoljena stanja su sva ona stanja (x, y) kod kojih je $x, y \in \{1,2,3\}$, dakle to su stanja:

(1,1) (1,2) (1,3) (2,1) (2,2) (2,3) (3,1) (3,2) (3,3).

Početno stanje je (1,1) a ciljno stanje je (3,3).

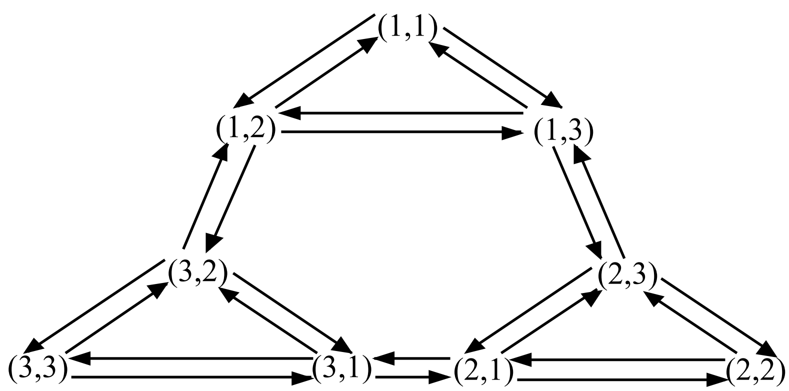
Primetiti da se kod stanja oblika (x, x) podrazumeva da se manji disk nalazi na većem. O tom ograničenju mora se voditi računa pri definisanju prelaza iz stanja u stanje.

b) Iz stanja (1,1) moguće je pomeriti samo manji disk i to na stub 2 ili stub 3 što odgovara prelascima u stanja (1,2) ili (1,3) respektivno. Iz stanja (1,2) moguće je pomeriti manji disk na stubove 1 ili 3 što odgovara stanjima (1,1) ili (1,3), a veći disk je moguće pomeriti na stub 3 što odgovara stanju (3,2). Veći disk nije, naravno, moguće pomeriti sa stuba 1 na stub 2 u ovom slučaju, jer bi se na taj način veći disk našao na manjem. Na sličan način se pronalaze i ostali dozvoljeni prelazi između stanja. Kompletno rešenje prikazano je tabelom 1. Ukoliko se u ulazu tabele u vrsti (x, y) i koloni (x', y') nalazi ✓ to znači da je dozvoljen prelazak iz stanja (x, y) u stanje (x', y').

Tabela 1

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
(1,1)		✓	✓						
(1,2)	✓		✓					✓	
(1,3)	✓	✓				✓			
(2,1)					✓	✓	✓		
(2,2)				✓		✓			
(2,3)			✓	✓	✓				
(3,1)				✓				✓	✓
(3,2)		✓					✓		✓
(3,3)							✓	✓	

c) Na osnovu tabele 1, lako se dobija traženi graf prikazan na slici 2. Operatori promene stanja nisu eksplicitno naznačavani; oni se mogu odrediti na osnovu čvorova stanja koje povezuju.



Slika 2

d) Kompletno stablo pretrage obuhvata sve otvorene putanje u grafu pretrage koje počinju u startnom čvoru i završavaju se ili u ciljnom čvoru ili u čvoru iz koga svaka dalja primena operatora dovodi do zatvaranja putanje. Ukoliko cilj nije eksplicitno zadat, putanja se završava kada se obiđu sva stanja iz grafa pretrage.

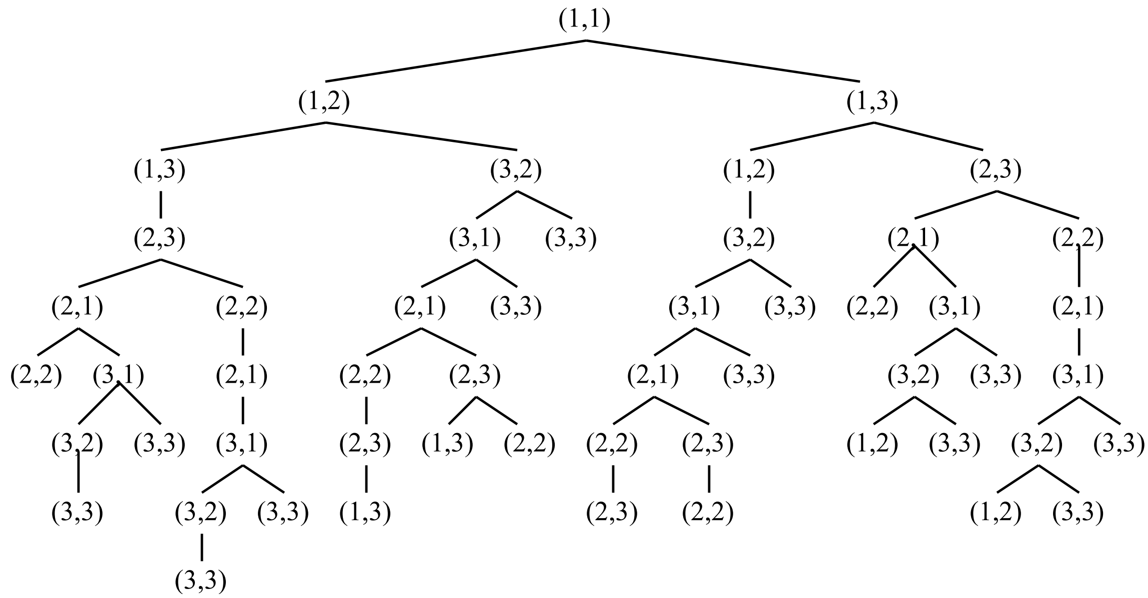
Za putanju u grafu pretrage kaže se da je *zatvorena* ako se na toj putanji dva puta pojavljuje isti čvor, u suprotnom je putanja *otvorena*.

Čvorovi stabla pretrage odgovaraju stanjima, s tim što jednom stanju generalno odgovara više čvorova u stablu. Grane stabla predstavljaju operatore promene stanja. Procedura konstrukcije stabla pretrage je sledeća:

- Startnom stanju odgovara koren stabla pretrage. Po ekspandovanju startnog stanja u stablo pretrage unose se sinovi korenog čvora i odgovarajuće grane, pri čemu svakoj primeni operatora na početno stanje odgovara poseban čvor u stablu i grana koja od korena vodi do tog čvora. Time je koren stabla obrađen.
- Bira se jedan od neobrađenih čvorova u stablu pretrage. Ukoliko je reč o ciljnom čvoru (ako je cilj definisan), nikakva dalja akcija nije potrebna i čvor se može smatrati obrađenim. U suprotnom se ekspanduje stanje koje odgovara izabranom

čvoru. U stablo se unose čvorovi koji odgovaraju svakom od stanja dobijenih pri ekspanziji, ukoliko se stanje već nije pojavilo na putanji od korena do ekspandovanog čvora. Proces se ponavlja sve dok u stablu pretrage postoje neobrađeni čvorovi.

Kompletno stablo pretrage za ovaj problem prikazano je na slici 3.



Zadatak 2: Problem dva krčaga

Na raspolaganju su dva krčaga zapremina 3 i 2 litra bez mernih oznaka. Krčazi mogu da se pune vodom sa česme, a voda može i da se prospe. Potrebno je postići da se u manjem krčagu nađe 1 litar vode.

a) Definisati prostor stanja problema.

b) Definisati operatore koji sistem prevode iz stanja u stanje.

c) Navesti jedan od redosleda primene operatora koji predstavlja rešenje problema.

d) Tabelarno predstaviti kompletan graf pretraživanja za dati problem.

Rešenje

a) Stanja se mogu predstaviti uređenim parom (x, y) realnih brojeva x i y pri čemu:

- x predstavlja količinu vode u krčagu od 3 litra,
- y predstavlja količinu vode u krčagu od 2 litra,
- za x i y važe sledeća ograničenja: $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$.

Startno stanje je (0,0), a ciljna stanja su oblika $(x,1)$, pri čemu za x važi gornje ograniečnje.

b) Za zadati problem može se definisati 8 operatora primene stanja prikazanih u tabeli 2.

Tabela 2

redni broj	akcija	tekuće stanje	novo stanje	uslov primene
1.	isprazni veæi krčag	(x, y)	$(0,y)$	$x > 0$
2.	isprazni manji krčag	(x, y)	$(x,0)$	$y > 0$
3.	napuni veći krčag iz česme	(x, y)	$(3,y)$	$x < 3$
4.	napuni manji krčag iz česme	(x, y)	$(x,2)$	$y < 2$
5.	napuni veći krčag iz manjeg	(x, y)	$(3,y\text{-}3+x)$	$x < 3$ i $y > 0$ i $x+y \geq 3$
6.	napuni manji krčag iz većeg	(x, y)	$(x\text{-}2+y,2)$	$x > 0$ i $y < 2$ i $x+y \geq 2$
7.	isprazni veći krčag u manji	(x, y)	$(0,x+y)$	$x > 0$ i $y < 2$ i $x+y \leq 2$
8.	isprazni manji krčag u veći	(x, y)	$(x+y,0)$	$x < 3$ i $y > 0$ i $x+y \leq 3$

Kolona *uslov primene* odnosi se na vrednosti koordinata x i y u tekućem stanju (to jest. u onom stanju na koje primenjujemo operator). Tako, na primer, operator 'napuni veći krčag iz manjeg' može da se primeni u tekućem stanju samo ako je količina vode u manjem krčagu dovoljna da se veći krčag napuni do vrha (a eventualni višak vode ostaje u manjem krčagu).

c) Jedan od redosleda primene operatora koji vodi do rešenja je: 3,6,1,8,4,5.

Čitaocu se preporučuje da pronađe niz stanja, počev od početnog (0,0), kroz koja prolazi sistem za sekvencu operatora iz tačke c) rešenja, kao i da odgovori na pitanje da li je navedeno rešenje *optimalno* (da li je broj operatora u sekvenci minimalan).

d) Tabelom 3 predstavljeni su prelazi između stanja pod dejstvom operatora. Ukoliko u ulazu tabele u vrsti X i koloni Y stoji oznaka Op, to znači da se iz stanja X može preći u stanje Y pod dejstvom operatora Op; ukoliko je odgovarajući ulaz tabele prazan, to znači da se iz stanja X ne može preći u stanje Y primenom samo jednog operatora.

Tabela 3

	(0,0)	(3,0)	(0,2)	(3,2)	(1,2)	(2,0)	(1,0)	(2,2)	(0,1)	(3,1)
(0,0)		op3	op4							
(3,0)	op1			op4	op6					
(0,2)	op2			op3		op8				
(3,2)		op2	op1							
(1,2)		op5,8	op1	op3			op2			
(2,0)	op1	op3	op6,7					op4		
(1,0)	op1	op3			op4				op7	
(0,1)	op2		op4				op8			op3
(3,1)		op2		op4				op6	op1	

Zanimljivo je primetiti da se prelazi iz stanja (1,2) u stanje (3,0) mogu obaviti kako primenom operatora op5, tako i primenom operatora op8. U pitanju je granični slučaj kada se presipanjem jedan krčag isprazni a drugi napuni vodom. Slično je i sa prelazom iz stanja (2,0) u stanje (0,2).

Zadatak 3: Putna mreža (razni algoritmi pretrage)

Na slici 4 je prikazana mreža puteva sa označenim dužinama puteva u kilometrima. Vazdušna rastojanja od pojedinih gradova do grada G u kilometrima data su tabelom 4. Prikazati stablo pretrage i navesti redosled obilaženja čvorova pri pretrazi za nalaženje puta između gradova S i G ako se koristi :

a) pretraga po dubini (*depth-first*)

b) pretraga po širini (*breadth-first*)

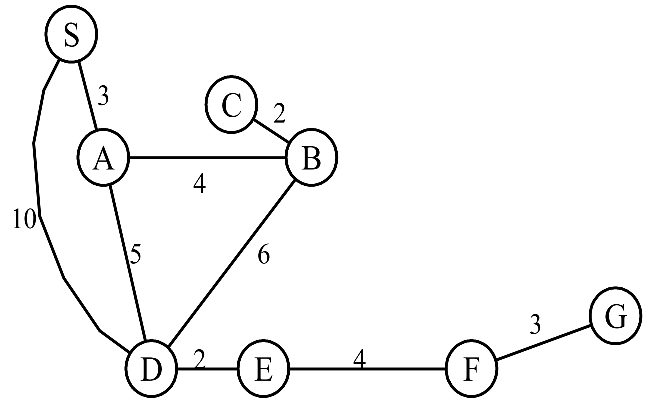
c) planinarenje (*hill-climbing*)

d) prvo najbolji (*best first*)

e) grananje i ograničavanje (*branch and bound*)

f) A*

Napomena: definisati na pogodan način heurističku funkciju i cenu rešenja za metode kojima su ove veličine potrebne.



Slika 4

Tabela 4

Grad	S	A	B	C	D	E	F
Rastojanje do G	11.5	10.4	6.7	7.0	8.9	6.9	3.0

Analiza problema

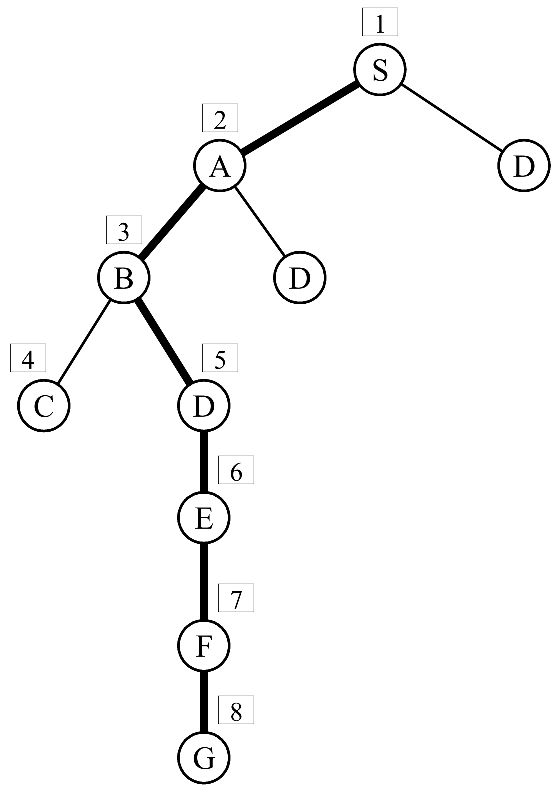
Za metode c), d) i f) koji koriste heurističku funkciju vazdušno rastojanje od tekućeg grada do grada G može se koristiti kao procena udaljenosti do cilja (radi se o potcenjenoj veličini). U metodima e) i f) funkcija cene pri prelasku iz jednog grada u drugi odgovara dužini puta između ova dva grada naznačenoj na mapi.

Rešenje

a) Stablo pretrage po dubini prikazano je na slici 5. Redosled obilaženja čvorova daju brojevi u kvadratima; iz čvora C kontrola je vraćena na drugog naslednika čvora B. Nađeni put

S-A-B-D-E-F-G

ima dužinu 22 km, što nije najkraći put između gradova A i G.

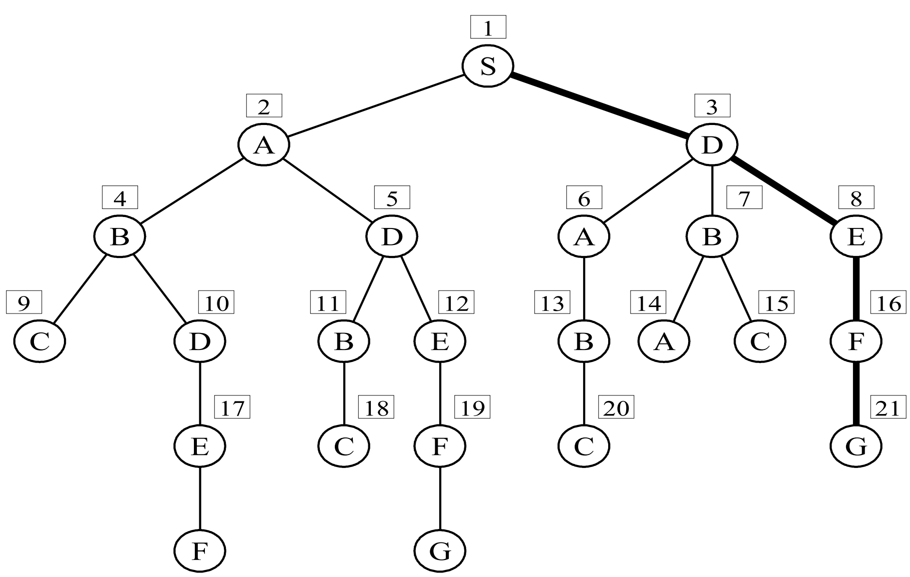


Slika 5

b) Stablo pretrage po širini prikazano je na slici 6. Stablo pretrage samo je malo manje od kompletnog stabla pretrage za ovaj problem - nije otkriven samo čvor G, naslednik čvora F na putanji S-A-B-D-E-F. Nađeni put dužine 19 km

S-D-E-F-G

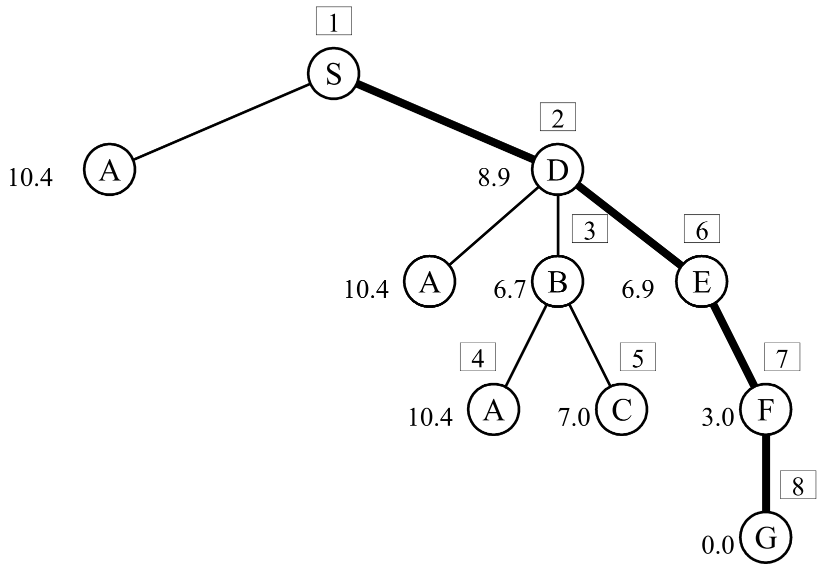
prolazi kroz najmanji broj gradova, ali nije najkraći mogući.



Slika 6

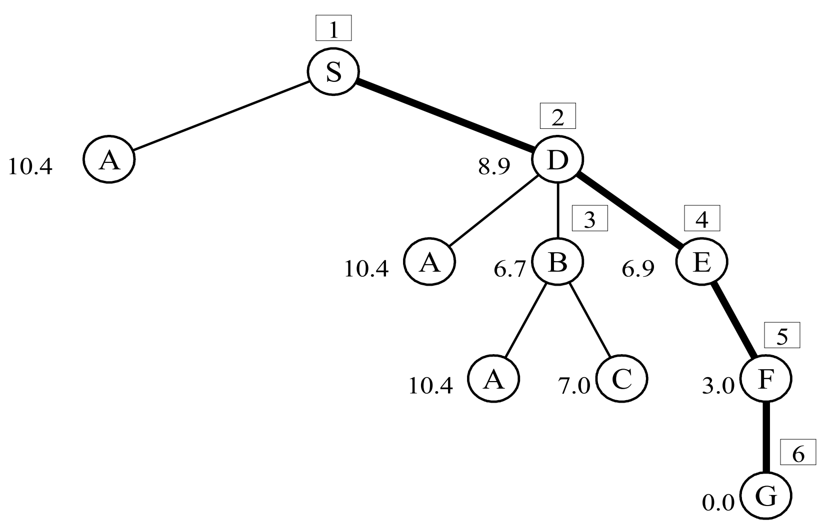
c) U slučaju pretrage metodom planinarenja (slika7) nalazi se ista putanja kao pri pretrazi po širini. Ovaj primer lepo ilustruje nedostatak metode izbora najboljeg (po vrednosti heurističke funkcije procene) čvora lokalno, to jest, među sinovima tekućeg čvora:

Po razvijanju čvora S, bira se čvor D u skladu sa heurističkom funkcijom čije su vrednosti navedene pored čvorova. Po razvijanju čvora D, bira se B kao najbolji. Razvijanjem čvora B, dobijaju se čvorovi A i C. Oba ova čvora su lošiji od već otkrivenog čvora E, sina čvora D, ali čvor E neće biti izabran dok se ne obiđu i A i C jer je izbor čvorova lokalan. Primetiti da čvor A na putanji S-D-B-A nije dalje razvijan u stablu pretrage, jer bi to dovelo do stvaranja zatvorenih putanja.



Slika 7

d) U slučaju primene metoda 'prvo najbolji' (slika 8) nađeno rešenje je isto kao u prethodnom slučaju. S obzirom da se kod ovog metoda najbolji čvor bira globalno, među svim otkrivenim a neobiđenim čvorovima, izbegava se obilaženje sinova A i C čvora B, to jest, manje se skreće sa ciljne putanje nego u prethodnom slučaju.



Slika 8

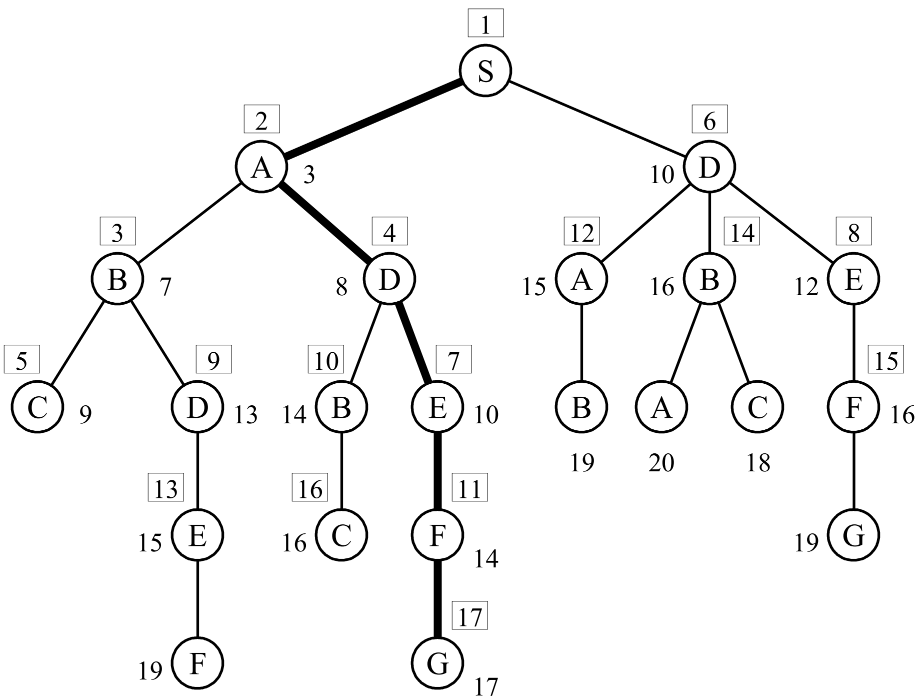
e) Na slici 9 prikazano je stablo pretrage po metodu *grananja i ograničavanja*. U ovom slučaju nađeno je optimalno rešenje problema:

S-A-D-E-F-G

Ova putanja je dužine 17 km.

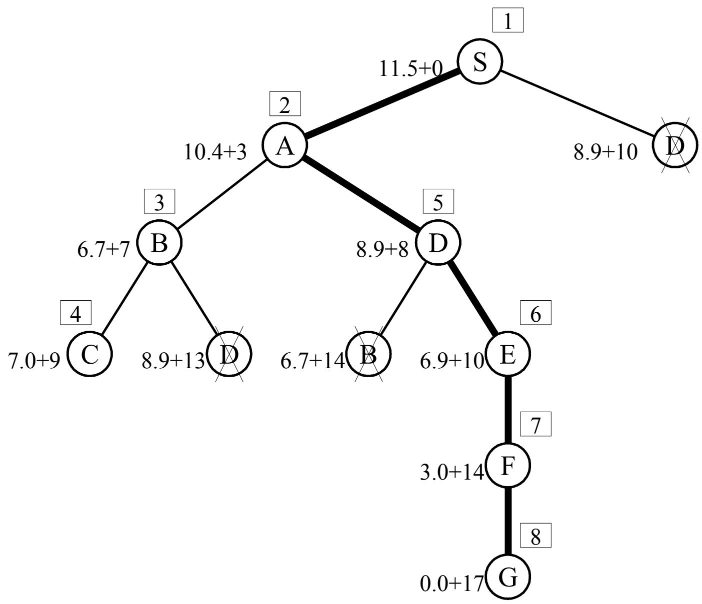
Stablo pretrage obuhvata, kao i u slučaju pretrage po širini, gotovo kompletno stablo pretrage. U ovom slučaju bira se parcijalna putanja najmanje dužine. Dužine pojedinih putanja prikazane su uz čvorove stabla pretrage (nezaokruženi brojevi). Zaokruženim brojevima predstavljen je redosled obuilaženja čvorova pri pretrazi.

Interesantno je primetiti da se pretraga u ovom slučaju ne završava kada se ekspanduje čvor F na putanji S-A-D-E-F i pri tome otkrije ciljni čvor G. Pre završetka pretrage potrebno je bilo produžiti sve otkrivene parcijalne putanje kraće od 17, koliko iznosi dužina nađene putanje do G, do njihovog završetka ili do čvorova gde dužina putanje prelazi 17. Moguće je da se ovakvim produžavanjem nađe nova, kraća putanja do čvora G što se u ovom slučaju nije desilo.



Slika 9

f) Pretraživanjem metodom A* (slika10) dobija se ista minimalna putanja kao i u prethodnom slučaju. Za razliku od prethodnog slučaja, odstupanje od ciljne putanje pri pretrazi je relativno malo zahvaljujući korišćenju heurističke funkcije. Precrtani čvorovi na slici 10 reprezentuju parcijalne putanje uklonjene po principu dinamičkog programiranja iz daljeg razmatranja.


1
S
11.5+0
2
A
10.4+3
D
8.9+10
3
B
6.7+7
5
D
8.9+8
4
C
7.0+9
D
8.9+13
B
6.7+14
6
E
6.9+10
7
F
3.0+14
8
G
0.0+17

Slika 10