INTELIGENTNI SISTEMI

as. ms Vladimir Jocović
as. ms Adrian Milaković

TEORIJA IGARA

Simultane igre

03

„When you play the game of thrones, you win or you die.“
- G. R. R. Martin

IGRE I VEŠTAČKA INTELIGENCIJA

Zašto su igre interesantne u AI-u?

Jedna od prvih primena veštačke inteligencije je bila u igrama. Prve igre koje su dobile AI igrače su X-O, šah, Go, Othello itd. Rešene su one igre za čije partije u svakom potezu može da se sa sigurnošću odredi ishod igre, ukoliko oba igrača igraju savršeno.

Igre su interesantne sa stanovišta AI jer su teške za rešavanje. Prosečan faktor grananja igre šah je 35, a prosečan broj poteza svakog igrača u jednoj partiji šaha je 40. To znači da je broj listova u kompletnom stablu igre 35^80, odnosno 3.35 * 10^123.

Prosečan faktor granja igre Go je čak 250.

Danas je AI prisutan u mnogim igrama: *NBA2K, FIFA, LoL, GTA itd*.

TEORIJA IGARA

Šta je teorija igara?

Teorija igara je grana primenjene matematike koja se bavi proučavanjem ponašanja pojedinca koji donosi neku odluku u interakciji sa drugim pojedincima. Uspeh pojedinca ne zavisi samo od njegovih odluka već i od odluka ostalih aktera sa kojima pojedinac interaguje.

Primena nije samo u igrama nego i u ekonomiji, politici, vojsci itd.

Pojedinci u interakciji sa drugim pojedincima mogu koristiti različite **strategije**.

POJAM STRATEGIJE

Pristup koji pojedinac koristi prilikom izbora njegovog sledećeg poteza predstavlja njegovu **strategiju**.

Potez predstavlja jedan od dostupnih izbora pojedinca koji on može izabrati u nekom trenutku igre.

*** *Strategija nije potez! Strategija predstavlja skup pravila koji odlučuje o izboru jednog od mogućih poteza pojedinca u svakom trenutku igre.* ***

Strategije mogu biti **čiste** (*pure*) ili **mešovite** (*mixed*).

POJAM STRATEGIJE

Čista strategija je deterministička politika (igrač igra jednu strategiju sa verovatnoćom 100%, a ostale sa 0%) i daje kompletne podatke o igranju igre od strane igrača koji je primenjuje.

Mešovita strategija je skup čistih strategija igrača u kome je svakoj čistoj strategiji dodeljena verovatnoća izbora te strategije. Suma verovatnoća izbora mora da iznosi 100%.

Profil strategija je skup strategija koji čini po jedna izabrana strategija za svakog igrača. Za svaki profil može da se odredi ishod za svakog igrača.

Rešenje igre je profil strategija koji čini po jedna izabrana strategija od strane svakog igrača.

ELEMENTI IGARA

<u>*Koji su elementi igre?*</u>

- **Igrači** – skup učesnika koji igraju neku igru.
- **Strategija** – igračima je na raspolaganju skup opcija koje definišu kako se igrači ponašaju.
- **Dobitak** – za svaku izabranu opciju igrači ostvaruju dobitak. Dobitak je obično predstavljen celobrojnim vrednostima.

Naš cilj je da rezonujemo kako će se igrači ponašati u igri.

TIPOVI IGARA

Koji sve tipovi igrara postoje?

- **Kooperativne/nekooperativne** – da li je dozvoljeno formiranje saveza između igrača ili ne.
- **Simetrične/asimetrične** – u simetričnim igrama identiteti igrača nisu bitni jer su dobici za primenu odgovarajuće strategije isti za sve igrače.
- **Zero-sum/non Zero-sum** – u zero-sum igrama suma dobitaka svih igrača jednaka je 0 za bilo koje kombinacije strategija.
- **Simultane/sekvencijalne** – simultane igre nemaju vremensku osu i odluke se saopštavaju simultano (čak iako su ranije donete). Predstavljaju se matricama dobitaka. Sekvencijalne igre krase suprotne odlike i predstavljaju se stablima.

KARAKTERISTIKE IGARA

Od interesa će biti igre sa sledećim karakteristikama:

Simultane – odnosi se na tajming saopštavanja odluka igrača igre. Igrači saopštavaju donete odluke gotovo istovremeno.

Nesavršene informacije – igrač ne zna koje su odluke odabrali ostali igrači dok ih oni sami ne saopšte, ali zna ko su ostali igrači, koje sve odluke neki igrač može doneti i kakvi će biti ishodi izbora svake od odluka po njega i po ostale igrače (**potpune informacije**).

Jednopotezne – igrači donose po jednu odluku u igri.

Nekooperativne – nema sklapanja saveza sa drugim igračima. Predstavlja nadmetanje između pojedinaca.

U igrama će uvek učestovati najmanje **dva** igrača.

PRETPOSTAVKE O IGRAMA

Važe sledeće pretpostavke osim, ako se ne naglasi drugačije.

Bitan je sopstveni dobitak – sve što je važno u igri za igrača definisano je samim dobitkom koji očekuje igrača izborom odgovarajuće strategije. Igrači ne ispoljavaju altruizam, tj. ne zanima ih dobitak ostalih igrača u igri.

Poznavanje strukture igre – iskazano je definicijom „potpune informacije" na prethodnom slajdu.

Racionalnost – igrač bira strategiju koja će mu doneti maksimalnu dobit, a imajući u vidu verovanje tog igrača u izbor određene strategije drugog igrača. Igrači uvek uspevaju u izboru svoje optimalne strategije, što je manje verovatno u realnim i kompleksnim problemima.

Primer 1 - Papir, kamen i makaze

strategije drugog igrača

strategije prvog igrača

			
	(0, 0)	(1, -1)	(-1, 1)
	(-1, 1)	(0, 0)	(1, -1)
	(1, -1)	(-1, 1)	(0, 0)

MATRICA ISPLATIVOSTI

Matrica isplativosti (eng. *Payoff matrix*) služi za tabelarni prikaz strategija igrača. Strategije jednog igrača prikazane su u redovima, a strategije drugog igrača u kolonama. Elementi matrice predstavljaju profile strategija i za svaki profil prva navedena vrednost predstavlja dobitak prvog igrača, a druga vrednost dobitak drugog igrača.

Matrica isplativosti nam pomaže da na koncizniji način prikažemo informacije problema i odredimo **dominantne strategije** i ***Nash*-ov ekvilibrijum** igre.

NASH-ov EKVILIBRIJUM

***Nash*-ov ekvilibrijum** predstavlja profil strategija tako da nijedan igrač ne može da napreduje (ostvari veći dobitak), ako jednostrano promeni svoju odluku (dok ostali igrači ne menjaju svoje odluke). Takav ekvilibrijum predstavlja rešenje nekooperativne igre.

John Nash je osvojio Nobelovu nagradu u kategoriji ekonomskih nauka 1994. zbog toga što je dokazao da svaka nekooperativna igra sa konačnim brojem igrača i konačnim brojem čistih strategija ima barem jedan *Nash*-ov ekvilibrijum.

Svaka strategija u profilu koji predstavlja *Nash*-ov ekvilibrijum jeste najbolji odgovor na ostale strategije drugih igrača u tom profilu.

Zadatak 1 - Dilema zatvorenika

★☆☆☆☆

Dva bandita su optužena za upad na privatan posed i osumnjičena za krađu velike količine novca. Obojica su uhapšeni i smešteni u posebne samice bez mogućnosti da komuniciraju jedan sa drugim. Banditi nisu uspeli da sakriju ukradeni novac te ih napolju ne čeka nikakva nagrada. Tužilac je angažovan na procesuiranju počinilaca, ali bez dovoljno konkretnih dokaza za veću kaznu on odlučuje da pokuša da se nagodi sa njima, odnosno da iznudi priznanje bandita da je ovaj drugi počinio krađu. Svaki bandit ima mogućnost da sarađuje sa tužiocem i svedoči protiv drugog bandita ili da ne izda drugog bandita time što će odbiti da svedoči.

Pretpostavka je da oba bandita razumeju pravila igre, da su lojalni samo sebi i da ih ne očekuje nikakva nagrada/kazna van ove igre.

Zadatak 1 - Dilema zatvorenika

★☆☆☆☆

Mogući ishodi su sledeći:

Ako obojica odluče da svedoče i time izdaju jedan drugog, obojica će biti osuđeni na po 5 godina zatvora.

Ako jedan svedoči protiv drugog, a drugi odbije da svedoči, onda će onaj koji je svedočio biti pušten iz zatvora na slobodu, a onaj koji je odbio da svedoči biti osuđen na 10 godina zatvora.

Ako obojica odbiju da svedoče, biće osuđeni na po 1 godinu zatvora zbog upada na privatan posed.

Problem je 1950. formulisao A.W.Tucker, kanadski matematičar.

Zadatak 1 - Rešenje

<u>Kako razmišlja bandit_1?</u>

(Igra je simetrična pa isto rezonuje i bandit_2)

„Ako pretpostavim da će bandit_2 da svedoči, ...“

- „... a ja takođe svedočim, biću osuđen na 5 godina zatvora“.
- „... a ja odbijem da svedočim, biću osuđen na 10 godina zatvora“.

„... dakle, isplativije mi je da **svedočim**“.

„Ako pretpostavim da će bandit_2 da odbije da svedoči, ...“

- „... a ja svedočim, biću oslobođen“.
- „... a ja takođe odbijem, biću osuđen na 1 godinu zatvora“.

„... dakle, opet mi je isplativije da **svedočim**“.

Zadatak 1 - Rešenje

Opcija svedočenja je uvek isplativija za bandita_1 (i za bandita_2) od opcije nesvedočenja pa je reč o *dominantnoj strategiji*.

Dominantna strategija je ona strategija koja igraču daje veći dobitak od svih ostalih njegovih strategija, bez obzira na strategiju koju izabere drugi igrač.

- **Striktno dominantna** – za svaku strategiju drugog igrača daje veći dobitak od svih ostalih strategija prvog igrača.
- **Slabo dominantna** – za barem jednu strategiju drugog igrača (ali ne za sve) daje veći dobitak od ostalih strategija prvog igrača, a za ostale strategije drugog igrača ne daje manji dobitak od svih ostalih strategija prvog igrača.

Problem? Ukoliko obojica svedoče, biće osuđeni na po 5 godina zatvora.

Zadatak 1 - Rešenje

Oba igrača imaju **striktno dominantnu** strategiju pa igra ima **jedinstven *Nash*-ov ekvilibrijum** koji čini profil strategija (svedoči, svedoči). To im donosi očekivani dobitak (-5, -5).

<u>Zašto banditi biraju da svedoče, ukoliko bi im opcija da ne svedoče donela po 1 godinu zatvora te bi zajedno bolje prošli?</u>

Zato što odbijanje svedočenja nije racionalna odluka. Banditi su lojalni jedino samome sebi i iz svojih ličnih (sebičnih) motivacija donose odluke koje su vođene najvećim mogućim dobitkom u sopstvenu korist. Odluka da ne svedoče (kooperativna odluka) je neracionalna, jer bi drugi igrač mogao da izda i time nanese veliku štetu prvom igraču (i obrnuto).

U realnosti, ljudi uglavnom imaju tendenciju ka kooperativnom ponašanju.

Zadatak 1 - Rešenje

Ukoliko bi oba igrača izabrala da ne svedoče, obojica bi bili osuđeni na po 1 godinu zatvora i takav ishod ove igre je *Pareto-optimalan ishod*. Čini ga profil strategija (ne svedoči, ne svedoči).

Pareto-optimanal ishod je onaj profil strategija za koji važi da ne postoji nijedan drugi profil strategija za koji barem jedan igrač prolazi bolje, a da ostali igrači ostvare jednak ili veći dobitak (odnosno, da ostalima ne bude gore).

Da li su profili (svedoči, ne svedoči), odnosno (ne svedoči, svedoči) Pareto-optimalni?

Jesu, zato što nije moguće izmeniti profil strategija tako da barem jednom igraču bude bolje, a ostalima ne bude gore.

Da li je profil (svedoči, svedoči) Pareto-optimalni?

Nije, zato što je moguć prelaz u profil strategija (ne svedoči, ne svedoči).

Koncept Pareto-optimalnosti je osmislio italijanski sociolog V. Pareto.

KOORDINACIONE IGRE

Neke igre imaju jedinstven *Nash*-ov ekvilibrijum i realno je pretpostaviti da će igrači (sa obzirom da su racionalni i vođeni ličnim dobitkom) izabrati strategije koje čine profil koji predstavlja jedinstveni *Nash*-ov ekvilibrijum.

Postoje igre koje imaju više od jednog *Nash*-ovog ekvilibrijuma i takve igre se nazivaju **koordinacionim igrama**. Naziv potiče od činjenice da igrači moraju da usklade (koordiniraju) izbor iste strategije da bi ostvarili cilj. U suprotnom, dobitak im je značajno manji.

U koordinacionim igrama ponekad može biti teško predvideti kako će se racionalni igrači ponašati.

KOORDINACIONE IGRE

Kako da igrači usklade izbor iste strategije?

- Ideja „*ključne tačke*“ – u nekim igrama postoje prirodni, evolutivni ili kulturološki razlozi (nije reprezetovano matricom dobitaka) koji navode igrače na izbor određenog *Nash*-ovog ekvilibrijuma. Npr. ukoliko dva automobila idu jedan drugom u susret, šta će uraditi vozači da se mimoiđu?
- Poznavanjem igrača i njegovih preferenci, kao i njihovih načina razrešavanja konflikta u slučaju oprečnog mišljenja.
- Problem (ne)poverenja i sigurnosti – „*Bolje vrabac u ruci, nego golub na grani*“.

KOORDINACIONE IGRE

Primer balansirane koordinacione igre:

Oba izbora (S, S) i (T, T) za igrače A i B su podjednako dobra za oba igrača, ali bez dodatnih informacija teško je predvideti koji će *Nash*-ov ekvilibrijum izabrati.

A \ B	S	T
S	(1, 1)	(0, 0)
T	(0, 0)	(1, 1)

Primer nebalansirane koordinacione igre:

Iako su profili (S, S) i (T, T) *Nash*-ovi ekvilibrijumi oba igrača će izabrati strategiju T, jer im profil (T, T) daje bolji pojedinačni dobitak.

A \ B	S	T
S	(1, 1)	(0, 0)
T	(0, 0)	(2, 2)

Zadatak 2 – Bitka polova

★☆☆☆☆

Muž i žena žele da provedu veče zajedno i treba da se usaglase da li će ići na fudbal ili balet. Muž preferira fudbal, dok žena preferira balet, ali oboje više vole da provedu vreme zajedno nego sami.

MUŽ \ ŽENA	*FUDBAL*	*BALET*
FUDBAL	(2, 1)	(0, 0)
BALET	(0, 0)	(1, 2)

Zadatak 2 – Rešenje

Koji profili strategija predstavljaju Nash-ov ekvilibrijum?

To su profili (FUDBAL, FUDBAL) i (BALET, BALET).

Kako predvideti kom ekvilibrijumu će težiti igrači?

To je teško utvrditi bez: dodatnog poznavanja preferenci igrača koje nisu predstavljene matricom dobitaka, verovanja igrača u odluke drugih igrača i načina razrešavanja neslaganja između njih.

Kako da igrači odluče kom ekvilibrijumu će težiti?

Ukoliko mogu da se dogovore (korelisani ekvilibrijum): da biraju naizmenično fudbal/balet; da koriste fer izvor slučajnih vrednosti, npr. bacanje fer novčića (glava-fudbal, pismo-balet, 50-50 šanse).

Koji su profili strategija Pareto optimalni?

To su profili (FUDBAL, FUDBAL) i (BALET, BALET).

Zadatak 3 – Lov na jelena

★☆☆☆☆

Dva lovca su odlučili da idu u lov. Ukoliko love zajedno, sigurno mogu da ulove jelena, što će im doneti veći ulov. Jedan lovac ne može sam da ulovi jelena, ali može sam da ulovi zeca, što predstavlja manji ulov nego pola jelena. Ukoliko zajedno love zeca, uloviće ga i podeliće ga.

LOVAC1 \ LOVAC2	*LOVI JELENA*	*LOVI ZECA*
LOVI JELENA	(5, 5)	(0, 4)
LOVI ZECA	(4, 0)	(2, 2)

Zadatak 3 – Rešenje

<u>Koji profili strategija predstavljaju Nash-ov ekvilibrijum?</u>
To su profili (JELEN, JELEN) i (ZEC, ZEC).

Profil (JELEN, JELEN) je *Payoff* dominantan ekvilibrijum jer je **Pareto superiorniji** u odnosu na sve ostale *Nash*-ove ekvilibrijume, odnosno svakom igraču daje više ili barem toliko dobiti koliko daju drugi *Nash*-ovi ekvilibrijumi.

Profil (ZEC, ZEC) je *Risk* dominantan ekvilibrijum jer je manje rizičan, odnosno ukoliko igrači imaju više nepoznanica o strategijama drugih igrača ili iskazuju više nepoverenja prema njima, veća je šansa da izaberu strategiju koja odgovara ovom ekvilibrijumu.

Zadatak 3 – Rešenje

Igre tipa „Lov na jelena“ su koordinacione igre u kojoj važe sledeće nejednakosti:

A > B, D > C, a > b, d > c

B >= d, b >= d

Igrač1 \ Igrač2	*PRVA*	*DRUGA*
PRVA	(A, a)	(C, b)
DRUGA	(B, c)	(D, d)

Profil strategija (PRVA, PRVA) je *Payoff* dominantan, ukoliko važi A >= D i a >= d, pri čemu je barem jedna od ovih nejednakosti striktna (A > D ili a > d).

Profil strategija (DRUGA, DRUGA) je *Risk* dominantan, ukoliko važi da je proizvod gubitaka nastao odstupanjem od strategije veći za profil strategija (DRUGA, DRUGA) nego za profil (PRVA, PRVA), odnosno (D - C) * (d - c) >= (A - B) * (a - b).

Zadatak 3 – Rešenje

Kako predvideti kom ekvilibrijumu će težiti igrači?

Igra liči na nebalansiranu koordinacionu igru, osim što je u slučaju izbora različitih strategija, igrač koji je išao na veći dobitak (strategija JELEN) više penalizovan, dok je igrač koji je išao na manji dobitak (strategija ZEC) manje penalizovan. Postoji *trade-off* između velikog dobitka i mogućnosti nekoordinacije odluka. Evolutivni pristup pokazuje da je populacija spremnija da prihvati *Risk* dominantan ekvilibrijum umesto *Payoff* dominantnog.

Kako da igrači odluče kom ekvilibrijumu će težiti?

Ovde je prisutan problem poverenja. Igrači sa manjkom poverenja u ostale igrače ići će „na sigurno“, odnosno izabrati da love zeca.

Koji su profili strategija Pareto optimalni?

To je profil (JELEN, JELEN).

Zadatak 4 – Igra kukavica

★★☆☆☆

Dva tinejdžera igraju igru „Kukavice“. Tinejdžeri voze svoje automobile jedan prema drugom i izazivaju jedan drugog da skrenu sa puta kako bi izbegli sudar. Obojica imaju opciju da skrenu ili da nastave pravo. Ukoliko jedan od njih skrene, a drugi nastavi pravo, prvi će biti proglašen kukavicom, a drugi će osvojiti poštovanje. Ukoliko obojica skrenu, dele titulu kukavice pa je sramota manja nego u slučaju da samo jedan skrene. Ukoliko obojica nastave pravo, sudariće se i napraviće totalnu štetu.

VOZAČ1 \ VOZAČ2	*PRAVO*	*SKRENI*
PRAVO	(0, 0)	(5, 1)
SKRENI	(1, 5)	(3, 3)

Zadatak 4 – Rešenje

Koji profili strategija predstavljaju Nash-ov ekvilibrijum?

To su profili (PRAVO, SKRENI) i (SKRENI, PRAVO).

Koji su profili strategija Pareto optimalni?

To su profili (SKRENI, PRAVO), (PRAVO, SKRENI) i (SKRENI, SKRENI).

Da li je ovo koordinaciona igra?

Za razliku od koordinacionih igara (ekvilibrijume čine parovi istih strategija), ova igra je **antikordinaciona** (ekvilibrijume čine parovi različitih strategija). U koordinacionim igrama deljenje resursa predstavlja benefit za igrače, dok u antikoordinacionim igrama deljenje resursa nije poželjno, jer postoji rivalitet između igrača.

Zadatak 4 – Rešenje

Kako predvideti kom ekvilibrijumu će težiti igrači?

Nash-ovi ekvilibrijumi mogu da pomognu u sužavanju izbora mogućih profila strategija, ali je teško predvideti ishod igre bez dodatnih informacija.

Kako da igrači odluče kom ekvilibrijumu će težiti?

Jedna taktika bi mogla da bude da igrač javno obznani svoje namere – npr. pretnjom da neće da skrene; onesposobljavanjem svog volana ostavlja se samo mogućnost pravo, što bi uslovilo racionalnog protivnika da skrene. Ovo pokazuje da u nekim slučajevima redukovanje dostupnih opcija može biti dobra taktika.

Sigurno je da se igrači neće eksplicitno dogovarati kom ekvilibrijumu (koji čine parovi čistih strategija) će težiti, jer ukoliko bi to radili, onda uopšte ne bi bilo potrebe da igraju ovu igru.

Zadatak 4 – Rešenje

<u>Šta je onda rešenje?</u>
Osim prethodno navedenih profila čistih strategija, postoji još jedan profil strategija koje čine strategije koje za svakog igrača predstavljaju najbolji odgovor na bilo koju izabranu strategiju protivnika. Međutim, igrač ne bira isključivo jednu od svojih dostupnih čistih strategija, već verovatnoće sa kojima će igrati svaku od svojih dostupnih čistih strategija (**mešovite strategije**).

U konkretnom primeru, ukoliko strategiju PRAVO igra sa verovatnoćom p, onda strategiju SKRENI igra sa verovatnoćom $(1 - p)$, gde je p realan broj $[0, 1]$.

Zadatak 4 – Rešenje

*Koliki je dobitak prvog igrača, ukoliko drugi igrač igra **PRAVO** sa verovatnoćom q, a **SKRENI** sa (1 - q)?*

Ukoliko prvi igrač igra PRAVO, njegov dobitak je $0*q + 5*(1-q)$.

Ukoliko prvi igrač igra SKRENI, njegov dobitak je $1*q + 3*(1-q)$.

Šta bi bio odgovor prvog igrača, ukoliko q iznosi 0.1?

Najpre treba da izračunamo dobitke prvog igrača:

Dobitak za PRAVO: $0*0.1 + 5*(1-0.1) = 4.5$

Dobitak za SKRENI: $1*0.1 + 3*(1-0.1) = 2.8$

Odgovor prvog igrača bi bio da izabere strategiju PRAVO, jer mu ta strategija donosi veći dobitak.

Zadatak 4 – Rešenje

<u>Kako da drugi igrač izabere verovatnoću q?</u>

Da bi mešovita strategija bila najbolji odgovor drugog igrača na bilo koju strategiju prvog igrača, ne sme da važi da je dobitak prvog igrača veći primenom jedne od njegovih čistih strategija, jer bi onda prvi igrač izabrao tu čistu strategiju koja mu donosi veći dobitak. To znači da mora da važi:

$$0*q + 5*(1-q) = 1*q + 3*(1-q)$$

$5 - 5q = q + 3 - 3q$, tj. $2 = 3q$, odnosno $q = 2/3$

Strategija (2/3 PRAVO, 1/3 SKRENI) drugog igrača je najbolji odgovor na bilo koju strategiju prvog igrača. Time drugi igrač čini prvog igrača **indiferentim** u izboru svoje strategije.

Zadatak 4 – Rešenje

Prvom igraču je svejedno koju će strategiju izabrati i njegov očekivani dobitak je isti.

Dobitak za PRAVO: $0*2/3 + 5*(1-2/3) = 5/3$

Dobitak za SKRENI: $1*2/3 + 3*(1-2/3) = 5/3$

S obzirom da je situacija simetrična i iz ugla prvog igrača, analogno se dobija da je $p = 2/3$, odnosno mešovita strategija prvog igrača je (2/3 PRAVO, 1/3 SKRENI).

Izborom mešovite strategije (2/3 PRAVO, 1/3 SKRENI) i jedan i drugi igrač su indiferentni (svejedno im je) u izboru svojih čistih strategija i nijedan igrač ne može da bude eksploatisan od strane drugog igrača. S obzirom da ova mešovita strategija predstavlja najbolji odgovor jednog igrača na odluke onog drugog, onda ovaj profil strategija čini **mešoviti *Nash*-ov ekvilibrijum**.

Zadatak 4 – Rešenje

★★☆☆☆

Uzimajući u obzir dobijene verovatnoće, matrica verovatnoća igranja određenog profila strategija data je u nastavku.

VOZAČ1 \ VOZAČ2	*PRAVO (2/3)*	*SKRENI (1/3)*
PRAVO (2/3)	2/3 * 2/3 = 4/9	2/3 * 1/3 = 2/9
SKRENI (1/3)	1/3 * 2/3 = 2/9	1/3 * 1/3 = 1/9

Dobitak prvog igrača je: 4/9 * 0 + 2/9 * 5 + 2/9 * 1 + 1/9 * 3 = 15/9.

Isti dobitak se dobija i za drugog igrača.

Zadatak 4 – Rešenje

```
class Player:
    def __init__(self):
        self.payoff = 0
        self.kind = None

    def __str__(self):
        return f'{self.kind}: {self.payoff}'

    @staticmethod
    def get_kind():
        pass

    def get_decision(self):
        pass

    def get_payoff(self):
        return self.payoff

    def reset_payoff(self):
        self.payoff = 0

    def inc_payoff(self, inc):
        self.payoff += inc
```

Zadatak 4 – Rešenje

```
class Brave(Player):
    @staticmethod
    def get_kind():
        return 'B'

    def get_decision(self):
        return 0  # always take straight action

class Chicken(Player):
    @staticmethod
    def get_kind():
        return 'C'

    def get_decision(self):
        return 1  # always take swerve action

class PlayerFactory:
    @staticmethod
    def make_instance(kind):
        if kind == Brave.get_kind():
            return Brave()
        elif kind == Chicken.get_kind():
            return Chicken()
```

Zadatak 4 – Rešenje

```
payoff_matrix = [
    [[0, 0], [5, 1]],
    [[1, 5], [3, 3]]
]
players = []
players_len = 0
n_brave = 98
n_chicken = 1

distinct_players = {}
for i in range(n_brave):
    players.append(Brave())
distinct_players[Brave.get_kind()] = {'count': n_brave, 'payoff': 0}
for i in range(n_chicken):
    players.append(Chicken())
distinct_players[Chicken.get_kind()] = {'count': n_chicken, 'payoff': 0}
players_len = len(players)

iterations = 0
history = set()
print(f'Iteration {iterations:03}: {distinct_players}')
```

Zadatak 4 – Rešenje

```
while True:
    for i in range(players_len):
        players[i].reset_payoff()
    for i in range(players_len):
        for j in range(i + 1, players_len):
            f_pay, s_pay = payoff_matrix[players[i].get_decision()][players[j].get_decision()]
            players[i].inc_payoff(f_pay)
            players[j].inc_payoff(s_pay)

    players.sort(key=lambda obj: obj.get_payoff(), reverse=True)
    best = players[0]  # best
    worst = players[-1]  # worst
    distinct_players[worst.get_kind()]['count'] -= 1
    distinct_players[worst.get_kind()]['payoff'] = worst.get_payoff()
    distinct_players[best.get_kind()]['count'] += 1
    distinct_players[best.get_kind()]['payoff'] = best.get_payoff()
    his = (f'{Brave.get_kind()}{distinct_players[Brave.get_kind()]["count"]}|'
           f'{Chicken.get_kind()}{distinct_players[Chicken.get_kind()]["count"]}')
    if his in history or best.get_kind() == worst.get_kind():
        break
    history.add(his)
    iterations += 1
    print(f'Iteration {iterations:03}: {distinct_players}')
    players.insert(0, PlayerFactory.make_instance(players[0].get_kind()))
    players.pop(-1)
    print(f'\tBest {best.get_kind()} added with payoff {best.get_payoff()}.')
    print(f'\tWorst {worst.get_kind()} removed with payoff {worst.get_payoff()}.')
```

Zadatak 4 – Rešenje

Iteration 000: {'B': {'count': 98, 'payoff': 0}, 'C': {'count': 1, 'payoff': 0}}
Iteration 001: {'B': {'count': 97, 'payoff': 5}, 'C': {'count': 2, 'payoff': 98}}
    Best C added with payoff 98.
    Worst B removed with payoff 5.
Iteration 002: {'B': {'count': 96, 'payoff': 10}, 'C': {'count': 3, 'payoff': 100}}
    Best C added with payoff 100.
    Worst B removed with payoff 10.
...
Iteration 030: {'B': {'count': 68, 'payoff': 150}, 'C': {'count': 31, 'payoff': 156}}
    Best C added with payoff 156.
    Worst B removed with payoff 150.
Iteration 031: {'B': {'count': 67, 'payoff': 155}, 'C': {'count': 32, 'payoff': 158}}
    Best C added with payoff 158.
    Worst B removed with payoff 155.
Iteration 032: {'B': {'count': 66, 'payoff': 160}, 'C': {'count': 33, 'payoff': 160}}
    Best C added with payoff 160.
    Worst B removed with payoff 160.

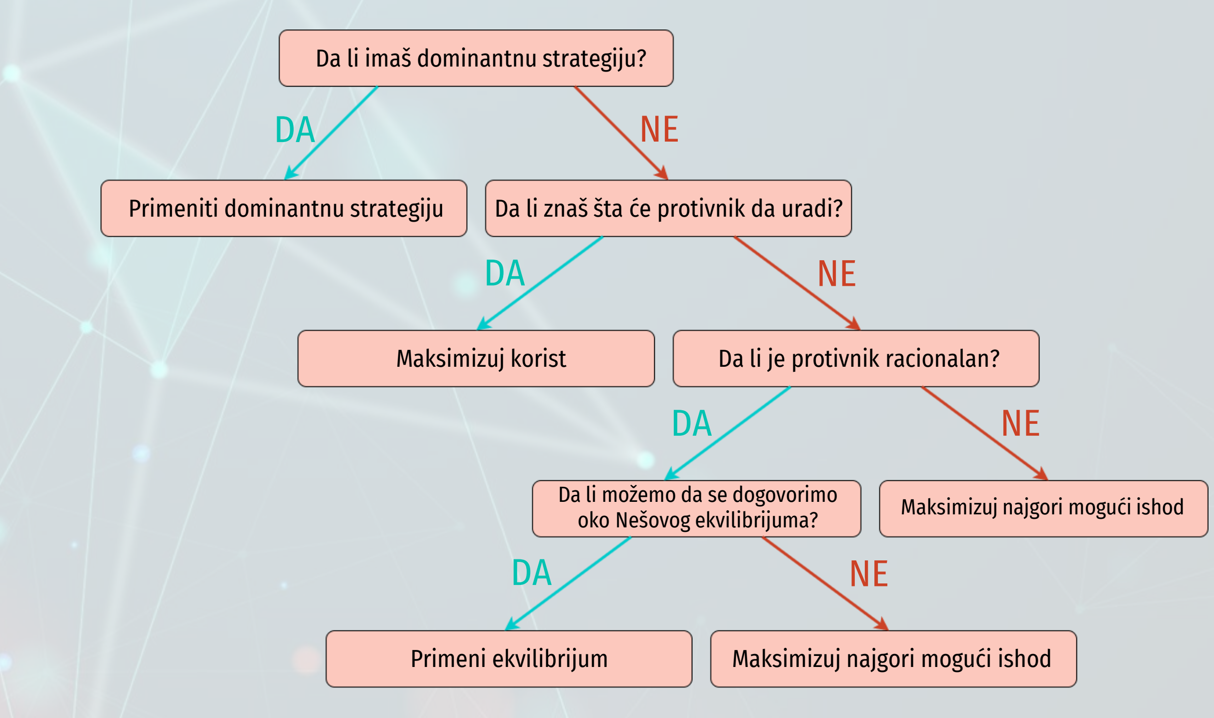
NASH-OV EKVILIBRIJUM

Da li svaka igra ima Nash-ov ekvilibrijum?
Da, svaka igra sa konačnim brojem igrača, čistih strategija i stanja ima barem jedan Nash-ov ekvilibrijum – čisti ili mešoviti (*John Nash*).

Da li svaka igra koja ima čisti Nash-ov ekvilibrijum ima i mešoviti Nash-ov ekvilibrijum?
Da, ali se on može poklapati (verovatnoće izbora čistih strategija u profilu su tada 1) sa jednim od čistih *Nash*-ov ekvilibrijuma.

Da li postoje igre koje nemaju nijedan čisti Nash-ov ekvilibrijum, a imaju mešoviti Nash-ov ekvilibrijum?
Da i takva je, na primer, igra papir-kamen-makaze.

RACIONALNO DONOŠENJE ODLUKA



ZADATAK ZA SAMOSTALAN RAD - Novčić

★★☆☆☆

Glava-pismo je igra u kojoj dva igrača drže po jedan novčić u ruci i simultano otkrivaju da li su pokazali glavu ili pismo svog novčića. Prvi igrač je pobednik, ukoliko su otkrivene iste strane novčića, a drugi igrač je pobednik, ukoliko su otkrivene različite strane novčića.

I1 \ I2	G	P
G	(+1, -1)	(-1, +1)
P	(-1, +1)	(+1, -1)

ZADATAK ZA SAMOSTALAN RAD - Rešenje

<u>Da li postoje dominantne strategije za svakog od igrača?</u>

Ne postoje ni striktno ni slabo dominantne strategije.

<u>Da li postoji profil koji čine čiste strategije i koji predstavlja Nash-ov ekvilibrijum?</u>

Ne postoji čist Nash-ov ekvilibrijum, jer za svaki od 4 profila strategija postoji inicijativa da jedan od igrača ne ostane u tom profilu s obzirom da na raspolaganju ima bolju strategiju. Npr. za profil (G, G) drugi igrač ima strategiju P koja mu donosi +1.

<u>Da li postoji mešoviti Nash-ov ekvilibrijum?</u>

Postoji i to je profil strategija [(½ G, ½ P), (½ G, ½ P)].

ZADATAK ZA SAMOSTALAN RAD - Saveznici

★★☆☆☆

Džon Snežni i Deneris Targerijan suočavaju se sa velikim izazovima u danima koji slede. Kralj noći, neprijatelj celokupnog čovečanstva, u čije postojanje Deneris ne veruje, nalazi se veoma blizu Zimovrela na severu, prestonice Džona Snežnog. Džon je odjahao na jug u Zmajkamen kako bi zamolio Deneris, majku zmajeva, da mu pomogne u borbi protiv Kralja noći. Samo zajedno, uz njene zmajeve, njihovu vojsku i njegovo vojničko iskustvo, mogu da pobede Kralja noći. Ta pobeda će ih koštati mnogo ljudstva, ali ako se zajedno ne suprotstave neprijatelju, on će ih lako eliminisati jednog po jednog. Deneris ima svojih problema sa Sersi, kraljicom Vesterosa i suparnicom za Gvozdeni tron. Ona jako žudi za Gvozdenim tronom i potreban joj je svaki vojnik kojeg ima i zato traži od Džona da je prizna za legalnog vladara Vesterosa kako bi mu zauzvrat pomogla u bici. Međutim, Džon zna da njegov narod ne bi odobrio takvu odluku, ali mu je potrebna sva pomoć. Payoff matrica je data u tabeli (prva vrednost je za Deneris, druga za Džona):

Deni \ Džon	Priznaj	Ne priznaj
Bori se	(+5, +5)	(-1, +10)
Ne bori se	(+10, -1)	(-10, -10)

ZADATAK ZA SAMOSTALAN RAD - Saveznici

★★☆☆☆

- Da li postoji dominantna strategija za Deneris?
- Da li postoji dominantna strategija za Džona?
- Da li postoji i koliko parova strategija koji čine Nash-ov ekvilibrijum?
- Za svaki Nash-ov ekvilibrijum koji postoji utvrditi i objasniti da li je on i Pareto-optimalan. Da li postoje i drugi Pareto-optimalni ishodi i koji su to?

Džon / Deni	Priznaj	Ne priznaj
Bori se	(+5, +5)	(-1, +10)
Ne bori se	(+10, -1)	(-10, -10)

ZADATAK ZA SAMOSTALAN RAD - Ucena

★★☆☆☆

Lanselot, jedan od najodanijih Arturovih vitezova, je u aferi sa Arturovom ženom Gvinervom. Nekoliko noći on je neopažen dolazio u njene odaje, ali su se jedne večeri posvađali oko njihove budućnosti, pa je Lanselot pošao da utoli tugu u lokalnoj taverni u Kamelotu. Od silnog pića on joj zapeva ljubavnu baladu ali je to čuo Agravejn, koji je čamio u samom uglu taverne u tami. Kada je došao sebi narednog dana, Lanselot je postao svestan šta je uradio. Agravejn je, želeći da dođe do novih informacija, došao u Lanselotove odaje, ali pre nego što je bilo šta rekao, zamislio je kakvu ponudu da iznese – da li da traži Lanselotov mač Arondajt ili bilo kog od njegovih brzih konja. Ako Lanselot ne prihvati ponudu, Agravejn će reći informaciju Arturu. Ipak, treba imati na umu da će Artur više verovati Lanselotu nego Agravejnu, pa ga može proglasiti za nepodobnog u kraljevstvu, jer širi dezinformacije. Payoff matrica je data u tabeli koja sledi (prva vrednost je za Lanselota, druga za Agravejna):

Lanselot \ Agravejn	Traži konja	Traži mač
Prihvati	(+4, +6)	(+1, +9)
Odbij	(-1, -3)	(-1, -3)

ZADATAK ZA SAMOSTALAN RAD - Ucena

★★☆☆☆

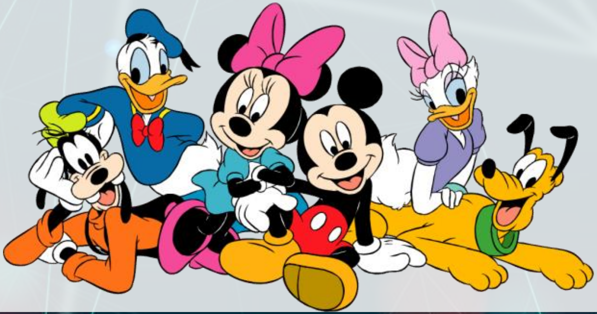
- Da li postoji dominantna strategija za Lanselota?
- Da li postoji dominantna strategija za Agravejna?
- Da li postoji i koliko parova strategija koji čine Nash-ov ekvilibrijum?
- Za svaki Nash-ov ekvilibrijum koji postoji utvrditi i objasniti da li je on i Pareto-optimalan. Da li postoje i drugi Pareto-optimalni ishodi i koji su to?

Lanselot \ Agravejn	Traži konja	Traži mač
Prihvati	(+4, +6)	(+1, +9)
Odbij	(-1, -3)	(-1, -3)

ZADATAK ZA SAMOSTALAN RAD – Subotnje veče

★★☆☆☆

Miki, Mini, Paja, Pata, Šilja i Pluton su odlučili da zajedno provedu veče. Međutim, već neko vreme se dogovaraju šta će da rade i ne uspevaju da nađu predlog koji odgovara svima te su odlučili da se odluče za dve aktivnosti, jednu koju će da predloži muški deo ekipe i jednu koju će da predloži ženski deo ekipe. Muškom delu ekipe su interesantna tri različita predloga, dok se ženski deo ekipe dvoumi između dve različite aktivnosti. Ekipa je zajedno napravila matricu isplativosti koja prikazuje sve moguće kombinacije aktivnosti i u svakoj ćeliji brojčano prikazuje zadovoljstvo muškog, odnosno ženskog dela ekipe u slučaju te kombinacije aktivnosti. Neke aktivnosti su ekipi možda interesantnije pojedinačno, međutim u kombinaciji sa drugom aktivnošću se možda ne isplate zbog velike udaljenosti lokacija odžavanja aktivnosti ili iz nekog drugog razloga.



Momci / Devojke	Društvene igre	Bilijar	Kuglanje
Bioskop	(+0, +2)	(+3, +3)	(+3, +3)
Večera u restoranu	(+3, +3)	(+2, +4)	(+4, +2)

ZADATAK ZA SAMOSTALAN RAD – Subotnje veče

★★☆☆☆

- Da li postoji dominantna strategija za Devojke? Da li je ona striktno ili strogo dominantna?
- Da li postoji dominantna strategija za Momke? Da li je ona striktno ili strogo dominantna?
- Da li postoji i koliko parova strategija koji čine Nash-ov ekvilibrijum?

Devojke \ Momci	Društvene igre	Bilijar	Kuglanje
Bioskop	(+0, +2)	(+3, +3)	(+3, +3)
Večera u restoranu	(+3, +3)	(+2, +4)	(+4, +2)

ZADATAK ZA SAMOSTALAN RAD - Ulog

★★★☆☆

Dva drugara, Miša i Pera, igraju igru ulaganja. Svako od njih ima tri izbora: da uloži 0, 1 ili 2 novčića. Broj novčića koji uvek mogu da osvoje je 10. Igrač koji više uloži osvaja sve novčiće. Ukoliko igrači ulože isti iznos, onda dele nagradu. Konačan dobitak za svakog igrača određen je kao razlika dobitka i uloga i izražen je (u zavisnosti od njihovih izbora) u vidu *Payoff* matrice koja je data u nastavku (prva vrednost je za Mišu, druga za Peru):

MIŠA \ PERA	0	1	2
0	(5, 5)	(0, 9)	(0, 8)
1	(9, 0)	(4, 4)	(-1, 8)
2	(8, 0)	(8, -1)	(3, 3)

ZADATAK ZA SAMOSTALAN RAD - Rešenje

Da li postoje dominantne strategije za svakog od igrača?

Ne postoje ni striktno ni slabo dominantne strategije.

Da li postoji profil koji čine čiste strategije i koji predstavlja Nash-ov ekvilibrijum?

To je profil (2, 2) i očekivani dobitak za svakog igrača je 3.

Da li postoje Pareto optimalni profili strategija i koji?

Postoje i to su profili:
(0, 0), gde je očekivani dobitak po 5 za svakog igrača.
(0, 1), gde je očekivani dobitak 0 za prvog, 9 za drugog igrača.
(1, 0), gde je očekivani dobitak 9 za prvog, 0 za drugog igrača.

ZADATAK ZA SAMOSTALAN RAD - Rešenje

Zašto profil (1, 1) nije Pareto-optimalan?

Zato što se iz njega može preći u profil (0, 0) koji je bolji za oba igrača, jer im uvećava dobitak za po 1.

Da li postoji mešoviti Nash-ov ekvilibrijum u kome su zastupljene sve čiste strategije?

Neka Pera igra strategije 0, 1 i 2 sa verovatnoćama p, q, 1-p-q. Tada je očekivani dobitak Miše za strategije 0, 1 i 2 redom:

$$0: 5*p + 0*q + 0*(1-p-q) = 5p$$

$$1: 9*p + 4*q - 1*(1-p-q) = 10p + 5q - 1$$

$$2: 8*p + 8*q + 3*(1-p-q) = 5p + 5q + 3$$

ZADATAK ZA SAMOSTALAN RAD - Rešenje

Da bi Pera učinio Mišu indiferentnim prema izboru svojih čistih strategija mora da važi:

$$5p = 10p + 5q - 1 = 5p + 5q + 3$$

Iz jednačine $5p = 5p + 5q + 3$ dobijamo da je $\mathbf{q = -3/5}$, što nije moguće te ne postoji mešoviti *Nash*-ov ekvilibrijum u kome su zastupljene sve čiste strategije.

<u>Ukoliko Miša ne zna šta će Pera da uradi, a zna da Pera nije racionalan igrač, koju će strategiju izabrati i zašto?</u>

S obzirom da zna da Pera nije racionalan, Miša će gledati da maksimizuje najgori mogući lični ishod i izabrati strategiju 2.

ZADATAK ZA SAMOSTALAN RAD – Policajci

★★★☆☆

Patrik i Geri igraju igru policajaca. Svako od njih dvojice ima na raspolaganju tri izbora: pucaj, zaštiti se i naoružaj se. Cilj igrača je da osvoji što veći broj poena. Igrač dobija tri poena, ukoliko upuca drugog igrača. Igrač ne može da bude upucan, ukoliko se štiti. Za svaki potrošeni metak, igrač gubi poen, a za svaki novi metak usled naoružanja, igrač dobija poen. Deo matrice dobitaka je dat na slici. Prva vrednost je dobitak Patrika, dok je druga vrednost dobitak Gerija.

Geri / Patrik	Pucaj	Zaštiti se	Naoružaj se
Pucaj	(+2, +2)	(-1, +0)	(+2, +1)
Zaštiti se			
Naoružaj se			

ZADATAK ZA SAMOSTALAN RAD – Policajci

★★★☆☆

- Da li postoji dominantna strategija za Patrika ili Gerija i koja? Ukoliko postoji, da li je strategija strogo ili striktno dominantna? Ukoliko ne postoji, da li bi se eliminisanjem neke od mogućih izbora za oba igrača (eliminacija izbora „Pucaj“, eliminacija izbora „Zaštiti se“ ili eliminacija izbora „Naoružaj se“) dobila matrica dobitaka (veličine 2x2) u kojoj postoji dominantna strategija? Da li bi takva strategija bila strogo ili striktno dominantna?
- Da li postoji i koliko parova strategija koji čine Nash-ov ekvilibrijum?
- Za svaki Nash-ov ekvilibrijum koji postoji utvrditi i objasniti da li je on i Pareto-optimalan. Da li postoje i drugi Pareto-optimalni ishodi i koji su to?

Geri / Patrik	Pucaj	Zaštiti se	Naoružaj se
Pucaj	(+2, +2)	(-1, +0)	(+2, +1)
Zaštiti se			
Naoružaj se			

ZADATAK ZA SAMOSTALAN RAD – Tajni spisi

★★★★☆

Jasmin je pronašla stare tatine spise dok se dosađivala u palati. Spisi predstavljaju zapisnik jedne trgovačke saradnje između Agrabe i Tira, još jednog bogatog grada. Deo zapisnika sadrži matricu dobitaka u trgovini pri različitim trgovačkim strategijama za koje gradovi mogu da se odluče. Deo spisa sa matricom je oštećen i nije moguće razaznati šta se tu nalazilo. Na nekoliko ostalih papira Jasmin je pronašla opise naizgled različitih matrica dobitaka. Kako ne zna koji opis odgovara matrici trgovačke saradnje koju je pronašla, Jasmin je odlučila da na osnovu svakog opisa rekreira jednu verziju nedostajućeg dela matrice. Matrica dobitaka je data na slici. Prva vrednost je vrednost dobitka Agrabe. Druga vrednost je vrednost dobitka Tira.

Agraba \ Tir	C	D
A	(-1, +4)	(+2, +2)
B	(+4, +2)	(x, y)

ZADATAK ZA SAMOSTALAN RAD – Tajni spisi

★★★★☆

Potrebno je pronaći sve vrednosti x i y (i ukratko objasniti postupak) takve da za matricu dobitaka važi opis (svaka stavka se rešava nezavisno):

- Agraba ima strogo dominantnu strategiju, Tir ima slabo dominantnu strategiju, a profil strategija (B, D) nije Pareto optimalan.
- U matrici ne postoji nijedan Nešov ekvilibrijum čistih strategija.
- Mešovita strategija (1/2, 1/2) za oba igrača predstavlja mešoviti Nešov ekvilibrijum.

Agraba \ Tir	C	D
A	(-1, +4)	(+2, +2)
B	(+4, +2)	(**x**, **y**)

ZADATAK ZA SAMOSTALAN RAD – Gicina kafana

★ ★ ★ ★ ★

Duško Dugouško, Tasmanijski Đavo i Pera Kojot Genije vole da idu u kafanu kod Gice Prasića na ručak. Gicina kafana im odgovara jer niko drugi tu ne dolazi i kafana je gotovo uvek prazna, a svako od njih trojice (kao veliki samotnjak) obožava kada je sam u kafani. Takođe, nijedan od navedene trojice ne voli preostalu dvojicu i ne govori sa njima i svakom od njih raspoloženje naglo pada, ukoliko se pojavi makar jedan od preostale dvojice, a kamoli obojica. U oba ta slučaja svako od njih više voli da obeduje kod svoje kuće nego u kafani kod Gice. Svako od trojice crtanih junaka je racionalan i može da donese jednu od dve odluke – da ostane i jede kod kuće ili da ide na ručak kod Gice u kafanu. Dobitak za svakog crtanog junaka dat je u matricama dobitaka, redom za Duška Dugouška, Tasmanijskog đavola (Taz) i Peru Kojota, respektivno:

Taz / Duško	Idi	Ostani
Idi	(-4, -4, -4)	(-2, +0, -2)
Ostani	(+0 -2, -2)	(+0, +0, +3)

Pera bira „Idi“

Taz / Duško	Idi	Ostani
Idi	(-2, -2, +0)	(+3, +0, +0)
Ostani	(+0, +3, +0)	(+0, +0, +0)

Pera bira „Ostani“

ZADATAK ZA SAMOSTALAN RAD – Gicina kafana

★ ★ ★ ★ ★

- Da li postoji dominantna strategija za bilo kog crtanog junaka? Da li je strategija (ukoliko postoji) striktno ili slabo dominantna?
- Da li postoji i koliko parova strategija koji čine Nash-ov ekvilibrijum?
- Za svaki Nash-ov ekvilibrijum koji postoji utvrditi i objasniti da li je on i Pareto-optimalan. Da li postoje i drugi Pareto-optimalni ishodi i koji su to?
- Odrediti profil mešovitih strategija koji predstavlja Nash-ov ekvilibrijum, ukoliko takav postoji. Da li igranje ovakve strategije predstavlja rešenje igre s obzirom na to da su igrači racionalni i da ne mogu da se dogovore?

Taz / Duško	Idi	Ostani
Idi	(-4, -4, -4)	(-2, +0, -2)
Ostani	(+0 -2, -2)	(+0, +0, +3)

Pera bira „Idi“

Taz / Duško	Idi	Ostani
Idi	(-2, -2, +0)	(+3, +0, +0)
Ostani	(+0, +3, +0)	(+0, +0, +0)

Pera bira „Ostani“

PITANJA?

http://ri4es.etf.rs/

CREDITS: This presentation template was created by **Slidesgo**, including icons by **Flaticon**, and infographics & images by **Freepik**.